数理解析研究所講究録
173巻 1973年 1-10



# 制限3体問題とTwist Mappingの摂動

京大 理　丹羽敏雄

## §1. Poincaré の制限3体問題

Newton 引力に従って空間内を動く3つの質点 $P_1, P_2, P_3$ の運動を調べる問題で、2体 $P_1, P_2$ はそれらの重心の回りを一定の角速度で円軌道を描きながら回転するとき、質量が無視できるほど小さい、すなわち質量0の第3の質点 $P_3$ の運動（それは $P_1, P_2$ の軌道面を動くものとする）を調べる問題をとくに Poincaré の平面制限3体問題という。この問題で特に興味があるのは、いわゆる正3角形解（Lagrange 解）の安定性の問題であるが、これは最近解決されたといってよい。

ここでくわしくは述べないがそれは次のような Mapping の ~~Peter~~ 摂動と深く関係する。

定義 (Twist Mapping of the Annulus) (J. Moser)

$$D = \{(R, \theta)\ ;\ 1 \leq R \leq 2\ ,\ \theta : \mathrm{mod}\ 2\pi\}$$

$$M : D \longrightarrow D : (R, \theta) \longmapsto (R_1, \theta_1)$$

$$\begin{cases} R_1 = R \\ \theta_1 = \theta + \alpha + \varepsilon\, r(R) \qquad \dfrac{dr}{dR} \neq 0 \end{cases}$$

## §2. Kolmogorov の制限3体問題

a) 等しい質量をもった2体 $P_1, P_2$ がそれらの重心のまわりを一般に楕円軌道を描きながら回転し，質量0の第3体 $P_3$ がその重心を通り $P_1, P_2$ の軌道面に垂直な直線上を動くとき、この $P_3$ の運動を調べる問題を我々は Kolmogorov の制限3体問題と呼ぼう。この問題は、いわゆる final motion の分類の問題、とくに capture の存在と関連して調べられてきたが、Alekseev によりこの問題に symbolic dynamics の手法が使えることが明らかになるに及んで別の意味の興味をひきおこしている．

b) 測度論的な dynamical system の理論（それを flow の理論と呼ぼう）はその源の1つに3体問題をもってはいるが、そこにおいてはその有効性はあまりなかった。1つには、有限な不変測度が一般には存在しない為であり、また存在して良く知られていた例では、その上での運動は簡単な概周期運動に帰着され、エルゴード的概念はさほど必要とされなかったからである．

他方、3体問題をはなれて一般の力学系においては、コンパクトな負曲率をもつ Riemann 面上の geodesic flow をその重要な例としてもつ Anosov - flow（C - flow）やあるいはその一般化と見なしうる撞球問題においては、

flow の理論の有効性は疑いない。これらの問題は、また symbolics dynamics や確率過程の理論とのかかわりのなかにあり、非常な発展をみせたことについても今さらいうまでもない。

これから紹介する Kolmogorov の制限3体問題に関する、あるいはこれに端を発した Alekseev の理論は、これらの間に橋をかけるものとして重要なものと思われる。

## §3. 問題の定式化.

空間に固定された座標系 $O-xyz$ を考え、2つの等しい質量をもった2質点が原点 $O$ をそれらの重心として $yz$−平面上を楕円軌道を描きながら周期 $2\pi$ で回転しているものとする。このとき質量 $0$ の第3の質点が $x$−軸を動いているものとすれば、その運動方程式は、単位系を適当にとれば、次の方程式になる：

$$\ddot{x} = -x\,(x^2+r_e^2(t))^{-3/2} = -\frac{\partial}{\partial x}U_e(x,t) \qquad \left(\dot{\ } = \frac{d}{dt}\right)$$

$$U_e(x,t) \equiv \int_0^x x\,(x^2+r_e^2(t))^{-3/2}\,dx$$

ここで $r_e(t) = \overline{OP_1} = \overline{OP_2}$ であり、周期 $2\pi$ の周期関数である。とくに楕円軌道の離心率 $e$ が十分小さいときは、

$$r_e(t) = 1 - e\cos t + \cdots$$

で与えられる．

この方程式で与えられるかる の質点 $P_3$ の運動を調べるには cross-section の方法が有効である．すなわち、質点 $P_3$ が原点 $O$ を通過する瞬間の系の state は、$P_3$ の速さ $v$ $(\geqq 0)$ と質点 $P_1, P_2$ の楕円運動の phase $\tau$ (= mean anomaly) とにようってきまる．このとき $(v, \tau)$ を平面 $\Pi$ の極座標と考えれば、$P_3$ が再び原点 $O$ を通過する瞬間の state を $(v', \tau')$ とすれば、写像

$$S_e : R_e^+ \longrightarrow R_e^- : (v, \tau) \longmapsto (v', \tau')$$

$$R_e^{\pm} \subset \Pi$$

は $\Pi$ の local diffeo. を与える。多くの点で $P_3$ の運動を調べることは、この写像 $S_e$ の研究に帰着する．

$e = 0$，すなわち 2 体 $P_1, P_2$ が円軌道を描く場合、$S_0$ は

$$R_0^+ = R_0^- = R_0 = \{(v, \tau)\,;\ 0 \leqq v < v_\infty\}$$

$$\frac{1}{2} v_\infty^2 = \int_0^\infty x\,(x^2+1)^{-3/2}\,dx$$

$$S_0 : R_0 \longrightarrow R_0 : (v, \tau) \longmapsto (v', \tau')$$

$$v' = v$$

$$\tau' = \tau + \gamma(v)$$

$$\gamma(v) \uparrow \infty \quad (v \uparrow v_\infty)$$

で与えられる．(かかる写像を我々は strong twist mapping と呼ぼう) $e \neq 0$ の場合 $S_e$ は $S_0$ の摂動と考えられ

る。さて J. Moser の twist mapping がいわば原点のまわりすなわち周期解のまわりを注目するのに対し、我々は $R_0$ の境界 $\partial R_0$ すなわち parabolic motion のまわりに注目する。

## §4 結果

Se は一般に次の "regularity condition"

"$\partial R_e^+$ と $\partial R_e^-$ は transversal に交わる"

をみたすと期待されるが（今の所、$e \ll 1$ のときはたしかに満たされるが、一般の $e$ に対してはわかっていない）もし Se がこの条件をみたすとすれば我々は次の結果をうる。

$$\omega = [a_n \ ; \ n_1(\omega) \leq n \leq n_2(\omega)]$$

ここで、$-\infty \leq n_1(\omega) \leq 0 < n_2(\omega) \leq \infty$

$a_n = (m_n, i_n)$ for $n_1 < n < n_2$

ここで $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n \geqq N$, $i_n = 0$ or $1$

$a_{n_1} = (v^-, i_{n_1})$ , $0 \leq v^- \leq \delta$ , $i_{n_1} = 0$ or $1$, $n_1 \neq -\infty$

$a_{n_2} = v^+$ , $0 \leq v^+ \leq \delta$ , $n_2 \neq \infty$

$\Omega = \{\omega\}$

$\Delta^+ \equiv \{\omega \in \Omega \ ; \ n_2(\omega) \neq 1\}$

$\Delta^- \equiv \{\omega \in \Omega \ ; \ n_1(\omega) \neq 0\} = T\Delta^+$

$T : \Delta^+ \longrightarrow \Delta^-$ , $(\Delta^\pm \subset \Omega)$ shift :

$$(T\omega)_n = \omega_{n+1}$$

$\Omega$には1つの自然な topology が入る，このとき：

<u>定理</u>（Alekseev）

$S_e$ が regularity condition をみたすとすれば，特に，$e \ll 1$ のとき．

$\exists N$，$\exists \delta > 0$

$\exists$ homeo $\varphi : \Omega \longrightarrow \Phi$ s.t

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \supset \Delta^+ & \xrightarrow{T} & \Delta^- \subset \Omega & & \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \text{commutative} \\ R^+ & \longrightarrow & R^- & & \end{array}$$

この図式は次のような意味で質点 $P_3$ の運動をかなりくわしく記述する．

$\varphi([a_n]) \in \Phi$ を初期状態とする解は次の性質をもつ：$P_3$ は $t>0$ において $n_2$ 回原点に戻り，$t<0$ において $n_1$ 回原点に戻る．$n$ 回目の帰還~~において~~と $(n+1)$ 回目の帰還の間に質点 $P_1$ と $P_2$ は原点のまわりを $m_n$ 回まわる．$i_n = 0$ (or $=1$) はその帰還時に $P_1$ と $P_2$ が近日点 (or 遠日点(?)) の近くにあることを示す．$n_2 \neq +\infty$ のとき，$P_3$ は $t>0$ において $n_2$ 回原点に戻った後 極限の速さが $v^+ = a_{n_2}$ の速さで無限のかなたに飛び去っていくことを示

し，$n_1 \neq -\infty$ のときも同様に $t<0$ において $|n_1|$ 回原点に廻って $t \to -\infty$ のとき $v^- = a_{n_1}$ の速さで無限のかなたから飛来したことを示す．従って，この図式をみれば，種々の final motion の存在がわかる．例えば，(complete) capture, oscilatory motion etc.

さらに系として

<u>Corolary</u> 解析的な第1積分は energy と angular momentum の関数である．

これは有名な Poincaré の定理よりもすこし強い．すなわち Poincaré の定理では積分が質量にも解析的に依存することを仮定するに対し，ここではその仮定は必要としない．

§5. 方法

方程式 $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_e$ と $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} U_0$ の解を考え．下図のように極大点 $(X(v_1,\tau_1), T(v_1,\tau_1))$ を共有するそれらの解が原点を切るときの state をそれぞれ

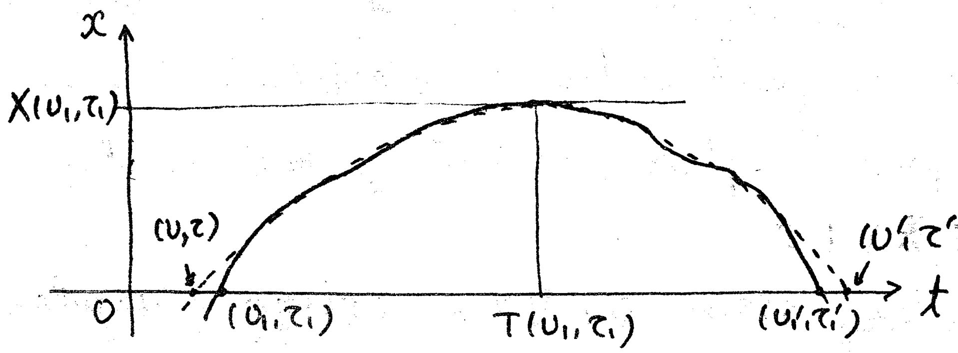
$$(v_1, \tau_1), \ (v, \tau)$$

とすれば，
$$(v_1', \tau_1') = S_e(v_1, \tau_1)$$
$$(v', \tau') = S_0(v, \tau)$$

とし，
$$T_e^+ : (v_1, \tau_1) \longrightarrow (v, \tau)$$
$$T_e^- : (v_1', \tau_1') \longrightarrow (v', \tau')$$

とするとき，

$$S_e = (T_e^-)^{-1} S_0 \, (T_e^+).$$




実線は $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} v_e(x,t)$ に対する解

点線は $\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} v_0(x)$ 〃 〃

さらに $C_{v_0}^{\pm} = (T_e^{\pm})^{-1}\{(v,\tau)\,;\, v=v_0\ (<v_\infty)\}$

とすれば，$C_{v_0}^{+}$，$C_{v_0}^{-}$ はそれぞれ $R_e^{+}$，$R_e^{-}$ 内の原点のまわりを囲む閉曲線となって

$$S_e(C_{v_0}^{+}) = C_{v_0}^{-}.$$

$e=0$ のときは $C_{v_0}^{+}$ と $C_{v_0}^{-}$ は一致するが $e\neq 0$ に対しては一般にそれらは分離する．$S_e$ は面積を保つ変換であるから，常に $C_{v_0}^{+}$ と $C_{v_0}^{-}$ は交点をもつが，必ずしも，それらが transversal に交わるとは限らない。

さて $I : (v,\tau) \to (v,-\tau)$

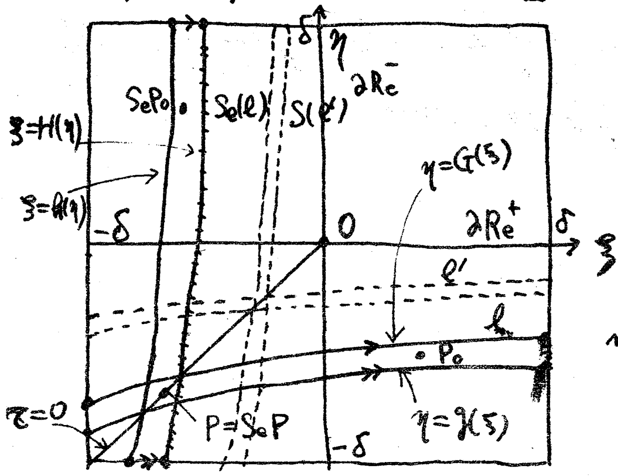
とするとき，$T_e^{+} = I\, T_e^{-}\, I$

をみたす．このことから容易に $C_{v_0}^+$ と $C_{v_0}^-$ は半直線 $\tau=0$（と $\tau=\pi$）上で交わることがわかる．$S_e$ の regularity condition は $v_0 \to v_\infty$ のとき，$C_{v_0}^\pm$ は $\tau=0$ $(\tau=\pi)$ 上で transversal に交わることを意味する．従ってそれは次のようにあらわされる：

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau_1} v_0(X(v_1,\tau_1))\Big|_{\tau=0} \right| > \varepsilon > 0$$

for $v \uparrow v_\infty$ : $(v,\tau)=T_e^+(v_1,\tau_1)$

この regularity condition と $S_e$ が strong twist mapping の性質をもつ為．$(v_\infty^e, 0) \in \partial R_e^+ \cap \partial R_e^-$ の近傍で写像 $S_e$ は次のような性質をもつ．$(\xi,\eta)$ をこの近傍の座標系で $\xi=$ const. が曲線 $C_{v_0}^-$ を表わし，$\eta=$ const が曲線 $C_{v_0}^+$ を表わすようなものとすれば，$S_e$ はこの座標系に関して次の図で表わされるような写像となる．




$\eta=g(\xi) \xrightarrow{S_e} \eta=\pm\delta$
$\eta=G(\xi)$

$\xi=\pm\delta \xrightarrow{S_e} \xi=h(\eta)$
$\xi=H(\eta)$

$$\max\left\{ \left|\frac{dg}{d\xi}\right|, \left|\frac{dG}{d\xi}\right|, \left|\frac{dh}{d\eta}\right|, \left|\frac{dH}{d\eta}\right| \right\} \ll 1$$

$$S_e : (\xi, \eta) \longrightarrow (\xi', \eta')$$

とすれば

$$dS = \begin{pmatrix} d\xi' \\ d\eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ O(1) & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \quad , \quad M \gg 1.$$

これらの性質は有名な Smale の "horse shoe" と類似であって、これらのことから、§4 でのべた結果をえることができる。

— 参考文献 —

[1] V. Alekseev : Quasi-random dynamical systems I, II, III ; Mat. Sb. 76. p.p 72~134, 77. p.p. 545~600, 78. p.p 1~43

[2] ——— : Sur l'allule finale du mouvement dans le problème des trois corps ; Actes, Congrès intern. Math., 1970 Tome 2 p.p. 893~907

[3] J. Chazy : Sur l'allule finale du mouvement dans le problème des trois corps ; J. Math Pures Appl. (1929) p.p 353~380

[4] C. Siegel - J. Moser : Lectures on celestial mechanics, (Springer)

[5] S. Smale : Differentiable dynamical systems, Bull. A.M.S. 73 (1967) p.p. 747~817